Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

DST de :	MATHEMATIQUES EXPERTES		
Date du DST :	Jeudi 12 décembre 2024	Durée de l'épreuve :	1h30 heure
Nom du professeur :	Mme FAHLAOUI	Groupe :	TOPTMATEX2
Matériel autorisé :	• L'usage de la calculatrice est interdite pour cette épreuve.		
Consignes particulières :	• Mettre la copie dans la pochette, compléter l'annexe et ne pas rendre le sujet. • Soigner la rédaction.		

Exercice 1

Vous devez répondre aux 10 questions.

Une seule réponse exacte par question.

*Sur la pochette jointe (**annexe pages 2 et 3**), pour chaque question, entourez la bonne réponse.*

Aucune justification n'est demandée.

Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Exercice 2

Donner un nombre entier naturel n à trois chiffres tel que les restes de 756 et 537 dans la division euclidienne par n soient respectivement égaux à 49 et 32.

Exercice 3

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = 0 \quad (E)$$

   (a) Montrer que le nombre $-2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation (E).

   (b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^3 + \left(-2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}\right) z^2 + \left(4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}\right) z + 8\mathrm{i} = (z + 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$$

   (c) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

   (d) Écrire les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

   (a) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

   (b) Placer ces points sur une figure (**à faire sur l'annexe page 4**) que l'on complétera par la suite.

   (c) On note D le milieu du segment [OB]. Déterminer l'affixe z_{L} du point L tel que AODL soit un parallélogramme.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

   (a) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
   Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

   (b) À l'aide de la question **3. (a)**, démontrer que le triangle AOL est rectangle en L.